***Кучевський М.І*. Наслідок від поцілунку Ф. Содді. //Математика в школах України. - 2009- №2.**

**1 . Фредерік Содді і його формула.**

Фредерік Содді (2.09.1877-22.09.1956) - англійський вчений в галузі радіохімії. Член Лондонського королівського товариства, професор Абердінського і Оксфордського університетів. Один з авторів теорії радіоактивного розпаду і радіоактивного зміщення. Експериментально підтвердив у 1903 році утворення гелію з радону, а також у 1915 році радію з урану. Ввів поняття про ізотопи. Лауреат Нобелівської премії 1921 року. Ф.Содді відомий також своїми оригінальними ідеями в області економіки.

Вніс він і свій вклад в геометрію. В 1936 році в журналі «Nature» опублікував поему «The Kiss Precise» («точний поцілунок »), в якій він розповів про відкриту ним формулу , яка пов'язує радіуси чотирьох взаємно дотичних кіл.

Якщо три кола будь якого розміру розташовані так, що кожне дотикається до другого, то завжди існує четверте коло , яке дотикається трьох даних. Содді зацікавився як взаємозалежать радіуси цих чотирьох кіл. Залежність між радіусами він і описав у поемі. Наведемо уривок із цієї поеми :

Чотири кола якось раз

Поцілувались в пізній час.

Дідусь Евклід про це не знав.

Він про любов не думав,

А я їх всіх намалював,

1

2

4

3

І формулу придумав:

Сума квадратів їх кривизн

Рівна половині квадрата їх суми.



де

- кривизна кола .

Як зізнавався сам Содді , він не довів цю красиву і симетричну формулу.

Доведемо її, використавши формулу для знаходження радіуса четвертого кола , яка була відома Р.Декарту:



.

Виконаємо слідуючі перетворення:



;

;



;



;

Піднесемо обидві частини до квадрата :



Додамо до обох частин вираз : .

Одержимо :



Позначимо , і одержимо формулу Содді :



Позначивши у цій формулі *k4* через *х* і розв'язавши одержане квадратне

рівняння , одержимо:



де - кривизна кола Декарта.



- кривизна п’ятого кола, яке при *х2*<0 буде описаним навколо трьох даних , а при  *х2*>0 буде дотикатись до них.

1

3

2

5

4

х2<0,



1

2

5

3

*х2*>0,



4

При *х2*=0 кривизна п'ятого кола буде нуль , і воно перетвориться у пряму лінію, дотичну до трьох даних кіл.

1

2

3

4

5

2. **Наслідок з формули Фредеріка Содді**.

Розглянемо задачу, яка зустрічається в переважній більшості збірників задач і посібників з елементарної геометрії. Наприклад:

1)*Цыпкин А.Г., Пинский А.И.* Справочное пособие по методам решения задач по математике.- М.; Наука , 1983. Пример 3.2 стр.246.

2)*Готман Э.Г. Скопец З.А.* Решение геометрических задач аналитическим методом. №11, стр.7.

3) *Шарыгин И.Ф.* Сборник задач по математике с решениями.- М.;2001, №37, стр.218. Решение стр. 342.

4) *Б.Н.Делоне и О.А.Житомирский* Задачник по геометрии. - М.; Физматгиз, 1959, №21.

Решение стр.149.

5) *Михайловський В.І.* Практикум з розв’язування задач з математики.- К.; Вища школа, 1979 № 3.122.

6) *Вишенський В.А. Ядренко М.Й.* Вибрані задачі з алгебри і геометрії.- К.; Вища школа , 1978, §13, № 6.

Задача 1.

Два кола радіусів R і r дотикається зовнішньо. Знайти радіус кола яке дотикається до цих кіл і їх зовнішньої спільної дотичної.

Розв'язування:

Спочатку знайдемо довжину зовнішньої спільної дотичної до двох кіл радіусів R і r , які дотикаються зовнішньо. Це буде допоміжна задача для розв’язування задачі 1.

О1

О

R

r

A

B

C

Проведемо ОС паралельно АВ. Тоді трикутник ОСО1 – прямокутний .СО1 = R-r а ОО1= R+r.

За теоремою Піфагора:



Тепер розв’яжемо основну задачу.

A

B

C

R

r

x

мал.1



За попередньою задачею:

Тому АВ=АС+СВ ;



Така ж відповідь та аналогічні методи розв’язування і у вищезгаданій літературі.

Очевидно , що ця задача є частинним випадком кіл Содді , коли кривизна одного з кіл 1, 2, 3 рівна нулю і воно перетворюється у дотичну пряму.



Тому застосуємо формулу Содді для випадку, коли



Одержимо :



або



або



або

Таким чином із формули Содді випливає , що існує два кола, що задовольняють умову задачі, якщо



А при існує одне коло з радіусом



Звичайно радіус другого кола можна було знайти і методом , описаним при розв’язуванні задачі 1. Досить було розглянути інші положення точки С на мал.1 , відносно точок А і В.

Будемо вважати , що R>r. Випадок коли С лежить між А і В ми вже розглянули.

Нехай А лежить між С і В. Тоді СВ=СА+АВ .



- Ця рівність не має змісту , бо ліва частина від’ємна , а права – додатна.

Нехай В лежить між С і А. Тоді АС= АВ +ВС.



Таким чином відповідь співпадає з відповіддю, одержаною за допомогою формули Содді.

Отже правильна відповідь до задачі 1 буде мати вигляд:



при



при



3.**Завдання для поглибленого вивчення** :

* 1. Доведіть формулу Декарта за допомогою теореми Піфагора.
  2. Доведіть формулу Декарта , використавши метод порівняння площ.
  3. Доведіть формулу Содді, використавши формулу косинусів.
  4. Узагальніть формулу Содді для n-вимірного простору.
  5. Виясніть геометричний зміст формули Содді для одновимірного простору.



* 1. Знайдіть залежність між радіусами при яких п’яте коло Содді буде дотикатись до даних кіл – зовнішнім, і при яких – внутрішнім способами.

Використана література.

1.*Гарднер М*.Математические досуги. - М.;Мир,1972.

2.*Кокстер Г.С.М.* Введение в геометрию.- М.; Наука, 1966.

3.*Коксетер Г.С.М.,* Грейцер С.Л. Новые встречи с геометрией. - М.;

Наука, 1978.

4.*Шарыгин И.Ф., Шторгин М.И.*Кто открыл формулу Содди?

// Математика в школе. 1992, №2-3.