РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ МЕТОДОМ РЕЗОЛЬВЕНТ

Н. И. Кучевский

В школьном курсе математики иррациональные уравнения решают методом возведения обеих частей в соответствующую степень, сведением с помощью замены переменной к системе уравнений или используют монотонность функций. Предлагаем ознакомить учащихся ещё с одним методом, который можно применять при решении уравнений вида

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}, \qquad (1)$$

$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)} \qquad (2)$$

и

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)} \qquad (3)$$

и соответствующих неравенств. По нашему мнению, метод особенно эффективен при решении иррациональных уравнений и неравенств с параметрами.

Уравнения, содержащие квадратные радикалы

Выполним равносильные преобразования с уравнениями (1) и (2).

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0, \\ h(x)\ge 0, \\ f(x)+g(x)-h(x)=-2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0, \\ h(x)\ge 0, \\ f(x)+g(x)-h(x)\le 0, \\ \left(f(x)+g(x)\right)^2-2\left(f(x)+g(x)\right)h(x)+h^2(x)=4f(x)g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0, \\ g(x)\ge 0, \\ h(x)\ge 0, \\ f(x)+g(x)-h(x)\le 0, \\ \left(f(x)-g(x)\right)^2-\left(2f(x)+2g(x)-h(x)\right)h(x)=0. \end{cases} \qquad (4)$$

$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)\ge g(x), \\ h(x)\ge 0, \\ f(x)+g(x)-h(x)=2\sqrt{f(x)}\sqrt{g(x)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)\ge g(x), \\ h(x)\ge 0, \\ f(x)+g(x)-h(x)\ge 0, \\ \left(f(x)+g(x)\right)^2-2\left(f(x)+g(x)\right)h(x)+h^2(x)=4f(x)g(x) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0, \\ f(x)\ge g(x), \\ h(x)\ge 0, \\ f(x)+g(x)-h(x)\ge 0, \\ \left(f(x)-g(x)\right)^2-\left(2f(x)+2g(x)-h(x)\right)h(x)=0. \end{cases} \qquad (5)$$

Уравнение

$$\left(f(x)-g(x)\right)^2-\left(2f(x)+2g(x)-h(x)\right)h(x)=0$$

будем называть ***резольвентой*** (лат. resolve — решаю) уравнений (1) и (2).

Если функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ рациональные, то получим рациональное уравнение.

Но поскольку резольвента — это уравнение-следствие, то среди корней могут оказаться посторонние для исходного. Поэтому корни резольвенты следует проверить, подставив их в исходное уравнение или в соответствующие неравенства.

Заметим, что уравнение (2) можно представить в виде уравнения (1) и наоборот, в зависимости от вида подкоренных функций, что может упростить резольвенту.

Если обозначить через D_f область допустимых значений переменной в уравнениях (1) и (2), то (4) и (5) можно записать в более компактном виде:

$$\sqrt{f(x)}+\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_f,\\ f(x)+g(x)-h(x)\le 0,\\ \left(f(x)-g(x)\right)^2-\left(2f(x)+2g(x)-h(x)\right)h(x)=0.\end{cases}\qquad(4^*)$$

$$\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}=\sqrt{h(x)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in D_f,\\ f(x)\ge g(x),\\ f(x)+g(x)-h(x)\ge 0,\\ \left(f(x)-g(x)\right)^2-\left(2f(x)+2g(x)-h(x)\right)h(x)=0.\end{cases}\qquad(5^*)$$

Покажем применение метода резольвент на конкретных примерах.

1. Решить уравнение

$$\sqrt{25-x}+\sqrt{9+x}=2.$$

Решение

Способ 1. (Традиционный)

ОДЗ: $\begin{cases}25-x\ge 0,\\ 9+x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-9;25].$

$$\sqrt{25-x}=2-\sqrt{9+x};$$

$$25-x=4-4\sqrt{9+x}+9+x;$$

$$6-x=-2\sqrt{9+x};$$

$$36-12x+x^2=4(9+x);$$

$$x^2-16x=0;$$

$$x=0\ \text{ или }\ x=16.$$

Найденные значения x входят в ОДЗ, но, как показывает проверка, не удовлетворяют исходному уравнению, поэтому оно не имеет корней.

Способ 2. (С помощью резольвенты)

$$\sqrt{25-x}+\sqrt{9+x}=\sqrt{4}.$$

$$f(x)+g(x)-h(x)=25-x+9+x-4=30>0,$$

что противоречит четвёртому неравенству системы (4), поэтому заданное уравнение корней не имеет.

Ответ. Корней нет.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}.$$

Решение

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3}=\sqrt{4x}.$$

Составляем резольвенту:

$$(2x+1-x+3)^2-(4x+2+2x-6-4x)\cdot 4x=0;$$

$$x^2+8x+16-8x^2+16x=0;$$

$$7x^2-24x-16=0;$$

$$x_1=4;\quad x_2=-\frac{4}{7}.$$

Проверкой устанавливаем, что $x_2=-\dfrac{4}{7}$ — посторонний корень.

Ответ. 4.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=3.$$

Решение

$$\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=\sqrt{9}.$$

Составляем резольвенту:

$$\left(x-\sqrt{x-2}-x-\sqrt{x-2}\right)^2-$$
$$-\left(2x-2\sqrt{x-2}+2x+2\sqrt{x-2}-9\right)\cdot 9=0;$$

$$4x-8-36x+81=0;$$

$$x=\frac{73}{32}.$$

Проверим, удовлетворяет ли полученное значение неравенству системы (4):

$$\begin{cases}x-\sqrt{x-2}\ge 0,\\ x+\sqrt{x-2}\ge 0,\\ 9\ge 0,\\ x-\sqrt{x-2}+x+\sqrt{x-2}-9\le 0.\end{cases}$$

Поскольку $\dfrac{73}{32}=2\dfrac{9}{32}$, то все неравенства будут выполняться, а значит, $x=\dfrac{73}{32}$ — корень заданного уравнения.

Ответ. $\dfrac{73}{32}$.

4. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=2.$$

Решение

$$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{4}.$$

Составляем резольвенту:

$$\left(x^2-2x+1-x^2-2x-1\right)^2-$$
$$-\left(2x^2-4x+2+2x^2+4x+2-4\right)\cdot 4=0;$$

$$0x^2=0;\quad x\in\mathbb{R}.$$

Проверим, удовлетворяют ли полученные значения x неравенству системы (4):

$$\begin{cases}x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0,\\ x^2+2x+1=(x+1)^2\ge 0,\\ 4\ge 0,\\ x^2-2x+1+x^2+2x+1-4\le 0.\end{cases}$$

Первые три неравенства выполняются при всех $x\in\mathbb{R}$, а четвёртое — $2x^2-2\le 0\Leftrightarrow x^2\le 1$ —

при $x\in[-1;1]$, значит, корнями уравнения являются все числа из промежутка $[-1;1]$.

Ответ. $[-1;1]$.

5. Решить уравнение $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$.

Решение

Запишем уравнение в виде:

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x}=a.$$

Очевидно, что при $a<0$ уравнение корней не имеет (его левая часть неотрицательна), а при $a=0$ $x=0$.

С учётом этого уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\sqrt{a+x}+\sqrt{x}=\sqrt{a^2},\\ a>0.\end{cases}$$

Резольвента уравнения системы:

$$\left(a+x-x\right)^2-\left(2a+4x-a^2\right)\cdot a^2=0;$$

$$a^2-\left(2a+4x-a^2\right)\cdot a^2=0.$$

Поскольку $a>0$, то

$$x=\frac{1-2a+a^2}{4}=\frac{(a-1)^2}{4}.$$

Определим, при каких значениях a полученное значение x удовлетворяет неравенству системы (4):

$$\begin{cases}a+x\ge 0,\\ a^2\ge 0,\\ x\ge 0,\\ a+2x-a^2\le 0.\end{cases}$$

Очевидно, что при

$$x=\frac{(a-1)^2}{4}$$

первые три неравенства выполняются при всех действительных $a>0$. Решим четвёртое неравенство:

$$a+\frac{(a-1)^2}{2}-a^2\le 0 \iff a^2-1\ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty).$$

Значит, системе удовлетворяют значения $a\in[1;+\infty)$ и при этих значениях заданное уравнение имеет корень

$$x=\frac{(a-1)^2}{4}.$$

Ответ. При $a<0$ и $0<a<1$ уравнение корней не имеет; при $a=0$ $x=0$; при $a\ge 1$ $x=\frac{(a-1)^2}{4}$.

6. (№ 27 V ММО [3], с. 29). Найти действительные корни уравнения

$$\sqrt{x^2-p}+2\sqrt{x^2-1}=x,$$

где p — действительный параметр.

Решение. Заданное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-p}=\sqrt{4x^2-4},\\ x\ge 0.\end{cases}$$

Решим уравнение системы с помощью резольвенты.

$$\left(x^2-x^2+p\right)^2-\left(4x^2-2p-4x^2+4\right)\left(4x^2-4\right)=0;$$

$$x^2=\frac{p^2}{8(2-p)}+1=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}.$$

Найденное значение должно удовлетворять неравенству системы (5).

$$\begin{cases}x^2-p\ge 0,\\ x^2\ge x^2-p,\\ 4x^2-4\ge 0,\\ -2x^2-p+4\ge 0.\end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases}\frac{(p-4)^2}{8(2-p)}-p\ge 0,\\ p\ge 0,\\ \frac{(p-4)^2}{2(2-p)}-4\ge 0,\\ \frac{(p-4)^2}{4(p-2)}-p+4\ge 0\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{(3p-4)^2}{8(2-p)}\ge 0,\\ p\ge 0,\\ \frac{p^2}{2(2-p)}\ge 0,\\ \frac{-3p^2+16p-16}{4(p-2)}\ge 0\end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases}p\in(-\infty;2),\\ p\in[0;+\infty),\\ p\in(-\infty;2),\\ p\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right]\cup(2;4]\end{cases} \iff p\in\left[0;\frac{4}{3}\right].$$

Значит, при

$$p\in\left[0;\frac{4}{3}\right]\quad x^2=\frac{(p-4)^2}{8(2-p)},$$

а потому

$$x_1=\frac{p-4}{2\sqrt{4-2p}} \text{ и } x_2=-\frac{p-4}{2\sqrt{4-2p}}.$$

Но для x_1 при $p\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$ не выполняется условие $x\ge 0$, поэтому x_1 — посторонний корень.

Значит, уравнение имеет единый корень

$$x=-\frac{p-4}{2\sqrt{4-2p}}=\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}} \text{ при } p\in\left[0;\frac{4}{3}\right].$$

Ответ. При $p\in\left[0;\frac{4}{3}\right]$ $x=\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$; при $p\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$ корней нет.

7. При каком наименьшем целом значении параметра a уравнение $\sqrt{x+a}+\sqrt{x-1}=3$ имеет решение?

Решение

$$\sqrt{x+a}+\sqrt{x-1}=\sqrt{9};$$

$$(x+a-x+1)^2-(2x+2a+2x-2-9)\cdot 9=0;$$

$$4x=\frac{(a+1)^2}{9}-2a+11;\quad x=\frac{a^2-16a+100}{36}.$$

Выясним, при каких значениях параметра a полученное значение неизвестной является корнем заданного уравнения, решив соответствующую систему неравенств.

$$\begin{cases}x+a\ge 0,\\ x-1\ge 0,\\ 9\ge 0,\\ x+a+x-1-9\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+20a+100\ge 0,\\ a^2-16a+64\ge 0,\\ a^2+2a-80\le 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\in(-\infty;+\infty),\\ a\in(-\infty;+\infty),\\ a\in[-10;8]\end{cases}\Rightarrow a\in[-10;8].$$

Значит, наименьшее целое значение параметра a, при котором уравнение имеет корень, равно -10.

Ответ. -10.

Уравнения, содержащие кубические радикалы

Уравнение (3) $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases}\left(f(x)+g(x)-h(x)\right)^3+27f(x)g(x)h(x)=0,\\ f(x)\ne g(x)\ne -h(x).\end{cases}$$

(Докажите!)

> Заметим, что следует помнить и о тривиальном случае: $f(x)=g(x)=h(x)=0$, тогда соответствующее значение x также будет корнем

Уравнение

$$\left(f(x)+g(x)-h(x)\right)^3+27f(x)g(x)h(x)=0$$

является резольвентой уравнения (3) и может иметь корни, которые являются посторонними для заданного уравнения. Значит, корни резольвенты следует проверить подстановкой в исходное уравнение или проверить, выполняется ли условие $f(x)\ne g(x)\ne -h(x)$.

Иногда удобно поступить так: решив систему уравнений

$$\begin{cases}f(x)=g(x),\\ f(x)=-h(x),\end{cases}$$

найдём корни резольвенты, которые будут посторонними для заданного уравнения или тривиальными, а если система не будет иметь решений, то все корни резольвенты будут корнями заданного уравнения.

Покажем применение метода на конкретных примерах.

1. Решить уравнение $\sqrt[3]{8x+4}+\sqrt[3]{8x-4}=2$.

Решение

$$\sqrt[3]{8x+4}+\sqrt[3]{8x-4}=\sqrt[3]{8}.$$

Составляем резольвенту:

$$(8x+4+8x-4-8)^3+27(8x+4)(8x-4)\cdot 8=0;$$

$$8^3(2x-1)^3+27\cdot 4\cdot 4\cdot 8\cdot(2x+1)(2x-1)=0;$$

$$4\cdot 4\cdot 8\cdot(2x-1)\left(16x^2+38x+31\right)=0;$$

$$2x-1=0 \text{ или } 16x^2+38x+31=0;$$

$$x=0{,}5 \text{ или } D<0 \text{ — корней нет.}$$

Непосредственной подстановкой в заданное уравнение убеждаемся, что $x=0{,}5$ — корень.

Ответ. $0{,}5$.

2. Решить уравнение $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

Решение

Сначала выясним, имеет ли резольвента корни, которые будут посторонними для заданного уравнения. Поскольку система уравнений

$$\begin{cases}x=x-16,\\ x=-x+8\end{cases}$$

не имеет решений, то все корни резольвенты являются корнями заданного уравнения.

$$(x+x-16-x+8)^3+27x(x-16)(x-8)=0;$$

$$(x-8)\left(28x^2-448x+64\right)=0;$$

$$x=8 \text{ или } x=\frac{56\pm 12\sqrt{21}}{7}.$$

Очевидно, что проверка полученных значений подстановкой приведёт к громоздким преобразованиям.

Ответ. 8; $\frac{56\pm 12\sqrt{21}}{7}$.

3. Решить уравнение $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2}\cdot x$.

Решение

$$\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{2x^3}.$$

Система уравнений $\begin{cases}x-1=x+1,\\ x-1=-2x^3\end{cases}$ не имеет решений, а значит, корни резольвенты являются корнями заданного уравнения.

$$\left(x-1+x+1-2x^3\right)^3+27(x-1)(x+1)\cdot 2x^3=0;$$

$$\left(2x-2x^3\right)^3+54(x-1)(x+1)\cdot x^3=0;$$

$$8x^3\left(1-x^2\right)^3-54x^3\left(1-x^2\right)=0;$$

$$2x^3\left(1-x^2\right)\left(4\left(x^2-1\right)^2-27\right)=0;$$

$$x=0;\quad x=\pm1;\quad x^2-1=\pm\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

$$x^2=1+\frac{3\sqrt{3}}{2};\quad x^2=1-\frac{3\sqrt{3}}{2}<0$$

— не имеет решений.

$$x=\pm\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}.$$

Ответ. 0; –1; 1; $\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$; $-\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$.

4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^2-7x+10}+\sqrt[3]{x^2-9x-36}=\sqrt[3]{2x^2-16x-26}.$$

Решение

Система уравнений

$$\begin{cases}x^2-7x+10=x^2-9x-36,\\ x^2-7x+10=-2x^2+16x+26\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-23,\\ 3x^2-23x-16=0\end{cases}$$

не имеет решений, поэтому все корни резольвенты являются корнями уравнения

$$\left(x^2-7x+10+x^2-9x-36-2x^2+16x+26\right)^3+$$
$$+27\left(x^2-7x+10\right)\left(x^2-9x-36\right)\left(2x^2-16x-26\right)=0;$$

$$27\left(x^2-7x+10\right)\left(x^2-9x-36\right)\left(2x^2-16x-26\right)=0;$$

$$x^2-7x+10=0\ \text{ или }\ x^2-9x-36=0$$

или

$$2x^2-16x-26=0;$$

$$x=2;\quad x=5;\quad x=-3;\quad x=12;$$

$$x=4-\sqrt{29};\quad x=4+\sqrt{29}.$$

Ответ. 2; 5; –3; 12; $4-\sqrt{29}$; $4+\sqrt{29}$.

5. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^2-3x-10}+\sqrt[3]{x^2+x-2}=\sqrt[3]{2x^2-2x-12}.$$

Решение

Система уравнений

$$\begin{cases}x^2-3x-10=x^2+x-2,\\ x^2-3x-10=-2x^2+2x+12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2,\\ \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ x=\dfrac{11}{3}\end{array}\right.\end{cases}$$

имеет решение $x=-2$ и это именно тот случай (см. замечание), когда

$$f(x)=g(x)=h(x)=0,$$

поэтому $x=-2$ также является корнем. Решив резольвенту, получим ответ.

Ответ. –2; 1; 3; 5.

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{6x+5}-\sqrt[3]{4x-3y}=1,\\ 6x+3y=4.\end{cases}$$

Решение

Выразим из второго уравнения $3y$ и подставим его значение в первое уравнение системы.

Получим: $\sqrt[3]{6x+5}-\sqrt[3]{10x-4}=1$. Решим это уравнение с помощью резольвенты.

$$\sqrt[3]{6x+5}+\sqrt[3]{4-10x}=\sqrt[3]{1}.$$

Система уравнений

$$\begin{cases}6x+5=10x-4,\\ 6x+5=-1\end{cases}$$

решений не имеет.

$$\left(6x+5+4-10x-1\right)^3+27(6x+5)(10x-4)=0;$$

$$(2x-1)\left(16x^2+317x+526\right)=0;$$

$$x_1=\frac{1}{2};\quad x_{2,3}=\frac{-317\pm45\sqrt{33}}{32}.$$

Подставив найденные значения во второе уравнение, получим:

$$y_1=\frac{1}{3};\quad y_{2,3}=\frac{1015\mp135\sqrt{33}}{48}.$$

Ответ. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right)$;

$$\left(\frac{-317+45\sqrt{33}}{32};\frac{1015-135\sqrt{33}}{48}\right);$$

$$\left(\frac{-317-45\sqrt{33}}{32};\frac{1015+135\sqrt{33}}{48}\right).$$

7. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{1+\lg\operatorname{tg}x}+\sqrt[3]{1-\lg\operatorname{tg}x}=2.$$

Решение

$$\sqrt[3]{1+\lg\operatorname{tg}x}+\sqrt[3]{1-\lg\operatorname{tg}x}=\sqrt[3]{8}.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} 1+\lg\operatorname{tg}x=1-\lg\operatorname{tg}x, \\ 1+\lg\operatorname{tg}x=-1 \end{cases}$$

несовместна.

$$(1+\lg\operatorname{tg}x+1-\lg\operatorname{tg}x-8)^3+$$
$$+27(1+\lg\operatorname{tg}x)(1-\lg\operatorname{tg}x)\cdot 8=0;$$

$$1-\lg^2\operatorname{tg}x=1;\quad \operatorname{tg}x=1;\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \text{где}\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ. $\frac{\pi}{4}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

8. Найти наибольшее целое значение параметра a, при котором все корни уравнения $\sqrt[3]{x+a+63}-\sqrt[3]{x+a-1}=4$ положительны.

Решение

$$\sqrt[3]{x+a+63}+\sqrt[3]{-x-a+1}=\sqrt[3]{64}.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} x+a+63=-x-a+1, \\ x+a+63=64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+a=-31, \\ x+a=1 \end{cases}$$

несовместна, поэтому все корни резольвенты являются корнями заданного уравнения.

$$(x+a+63-x-a+1-64)^3+$$
$$+27(x+a+63)(-x-a+1)\cdot 64=0;$$

$$x+a+63=0\ \text{или}\ -x-a+1=0;$$

$$x=-a-63;\quad x=-a+1.$$

Для того чтобы корни уравнения были положительными, нужно, чтобы выполнялось условие

$$\begin{cases} -a-63>0, \\ -a+1>0 \end{cases} \Rightarrow a<-63.$$

Значит, наибольшее целое значение равно -62.

Ответ. -62.

9. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{a-x}+\sqrt[3]{b-x}=\sqrt[3]{a+b-2x}.$$

Решение

$$(a-x+b-x-a-b+2x)^3+$$
$$+27(a-x)(b-x)(a+b-2x)=0;$$

$$a-x=0\ \text{или}\ b-x=0\ \text{или}\ a+b-2x=0;$$

$$x=a;\quad x=b;\quad x=\frac{a+b}{2}.$$

Подстановкой полученных значений в заданное уравнение убеждаемся, что все они являются его корнями.

Ответ. a; b; $\frac{a+b}{2}$.

Продолжение следует.